(1) $m, n \in \mathbb{N}^*$ Arătați că:

$$\frac{(2m)! \cdot (2n)!}{m! \cdot n! \cdot (m+n)!} \in \mathbb{N}$$

(G.M. 3/2015)

(2) Fie $a, b, c \in [0,1]$.

Arătați că

$$a^2 + b^2 + c^2 \le a^2 b + b^2 c + c^2 a + 1$$

(ViitoriOlimpici.ro)

(3) Fie $x, y, z > 0$ astfel încât

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 25 \\ y^2 + yz + z^2 = 169 \\ z^2 + xz + x^2 = 144 \end{cases}$$

Calculați: $xy + yz + xz$

(4) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ prime între ele.

Arătați că:

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{(n-1)m}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

(5) Fie $x_1, x_2, \dots x_n$ numere întregi distincte două câte două, cu suma 0.

Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{n-1}{2}$

(6) $x, y, z \in (0, \infty)$ $x + y + z = 1$. Arătați că:

$$(xy + yz + xz)\left(\frac{x}{y^2+y} + \frac{y}{z^2+z} + \frac{z}{x^2+x}\right) \geq \frac{3}{4}$$

(7) Fie $r>0$ și $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Definim șirul $(S_n)_n$

$$S_n = \cos\alpha + \cos(2\alpha) + \dots + \cos(n\alpha)$$

Arătați că există un interval de lungime r care conține o infinitate de termeni ai șirului.

(8) Să se rezolve în $[0, \infty)$ ecuația:

$$\sqrt{7x+9} + 21x^2 - 16x = \sqrt{3x+1} + 7$$

Soluții

① Pt. p prim,

$\exp_p(n)$ = exponentul lui p în descompunerea lui n.

Formula lui Legendre:

$$\exp_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right]$$

suma e de fapt finită, de la un rang încolo,

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] = 0$$

$$\exp_p(m) + \exp_p(n) = \exp_p(m \cdot n).$$

Demonstrăm că $(\forall)$ p prim

$$\exp_p\left((2n)! \cdot (2m)!\right) \geq$$

$$\geq \exp_p\left(m! \cdot n! \cdot (m+n)!\right)$$

Echivalent:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{2n}{p^i}\right] + \left[\frac{2m}{p^i}\right] - \left[\frac{m}{p^i}\right] - \left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{m+n}{p^i}\right]\right) \geq 0.$$

E suficient să arătăm

$$[2x] + [2y] - [x] - [y] - [x+y] \geq 0,$$

$(\forall)$ $x, y \geq 0$

Demonstrația se face pe cazuri:

$\{x\} \in [0, \frac{1}{2})$ sau $[\frac{1}{2}, 1)$

$\{y\} \in [0, \frac{1}{2})$ sau $[\frac{1}{2}, 1)$

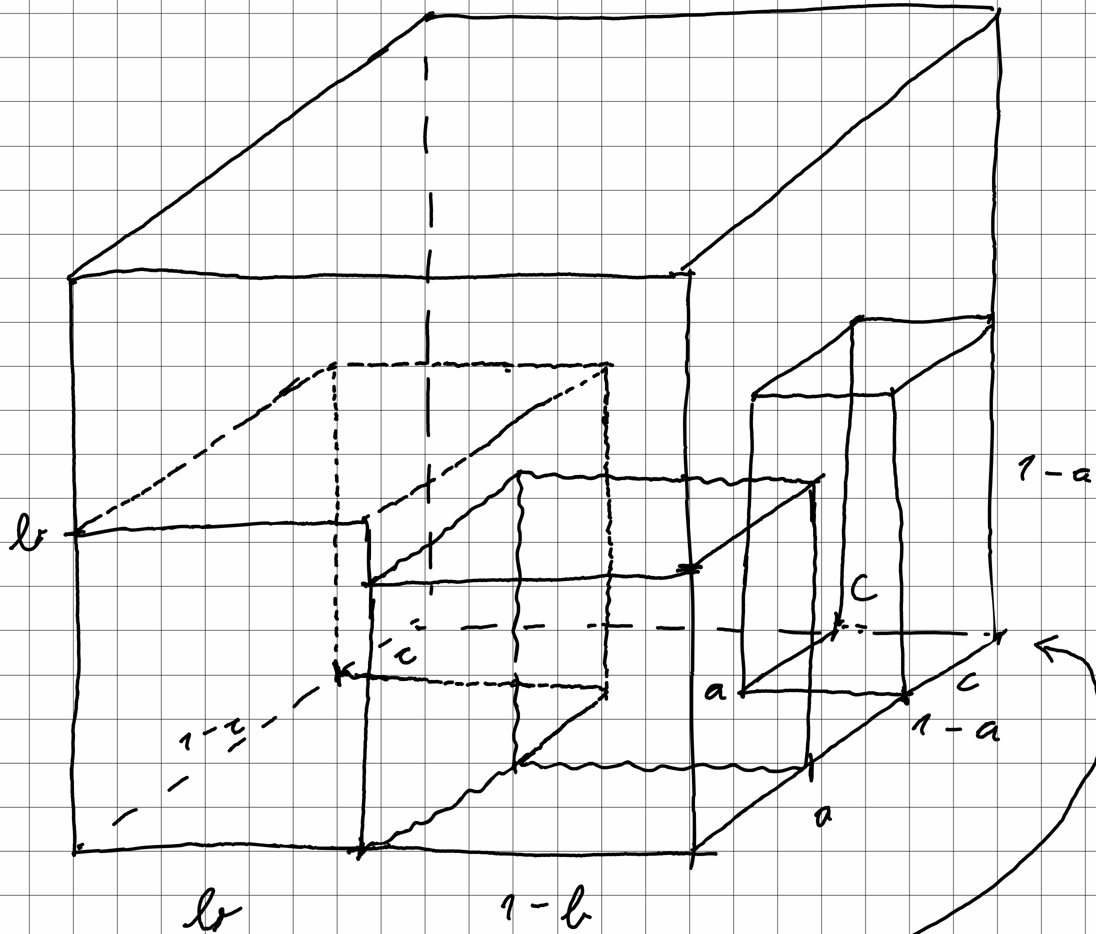
Considerăm $\begin{cases} x = \dfrac{n}{p^i} \\ \\ y = \dfrac{m}{p^i} \end{cases}$

$\square$

② Inegalitatea se poate reformula

$$a^2(1-b) + b^2(1-c) + c^2(1-a) \le 1$$

Considerăm un cub de latură 1:

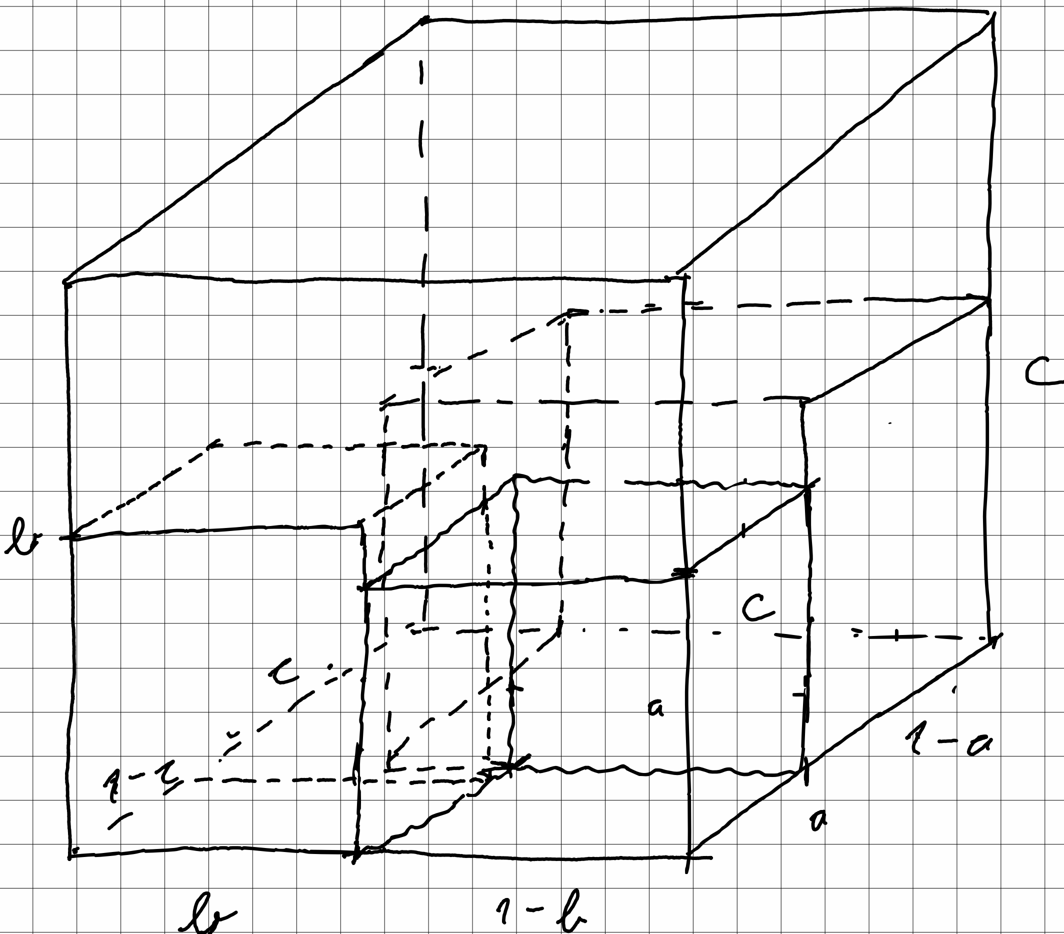


În colțul — încape un paralelipiped

$c \times c \times (1-a)$.

Dacă $c < (1-a)$ paralelipipedul poate fi așezat ca mai sus

Altfel, îl răsturnăm:

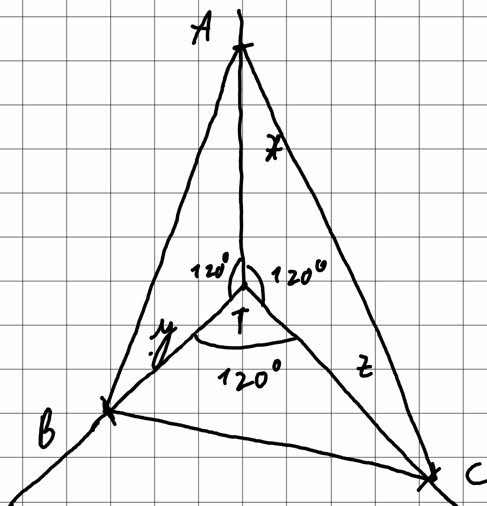


Suma volumelor celor 3 paralelipipede este exact

$$a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a),$$

care este ≤ 1 (volumul cubului)

③ Fie trei semidrepte în jurul unui punct cu unghiuri de 120° între ele



Din T. cosinusului:

$$AB^2 = x^2 + y^2 + xy$$

etc.

Deci $AB = 5$, $BC = 13$, $AC = 12$ $\Rightarrow$ ΔABC dreptunghic în A

$$A_{ATB} = \frac{x \cdot y \cdot \sin 120^\circ}{2}$$

$$= x \cdot y \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Rezultă:

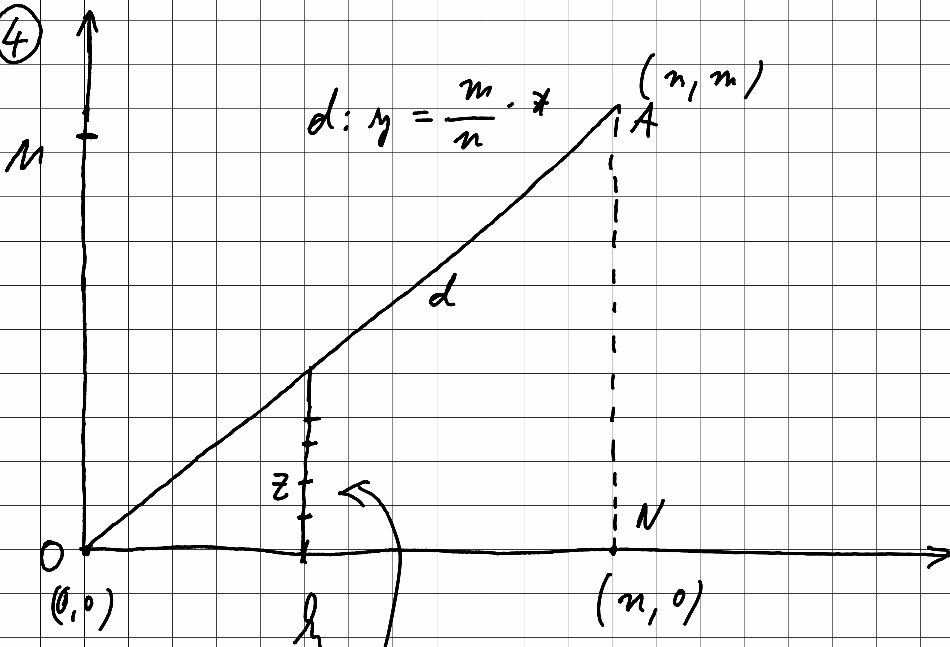
$$A_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (xy + yz + xz)$$

Dar $A_{ABC} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$

$$xy + yz + xz = 30 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$$

$\square$

4



$$z \le \frac{m}{n} \cdot k \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Deasupra lui $k \in \mathbb{Z}$ sunt

$$\left[\frac{m \cdot k}{n}\right]$$ puncte laticeale

sub dreapta d. (excludem punctele de pe Ox)

Pe dreapta d nu sunt puncte laticeale între $(0,0)$ și (n,m), căci cmmdc$(n, m) = 1$.

Numărul total de puncte laticeale din interiorul ΔONA este:

$$S = \left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + \dots + \left[\frac{(n-1)m}{2}\right],$$

exact suma din enunț.

Pe de altă parte,

$(m-1)\cdot(n-1)$ = nr. puncte laticeale în dreptunghiul $ONAM = 2S$,

căci pe dreapta d nu este niciun astfel de punct.

Obținem $S = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$

$\geq S + 1 + m$

⑤ $x_1, x_2, \dots x_n$ distincte două câte două,
deci $(x_i - x_j)^2 \geq 1$, dacă $i \neq j$

$$\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i<j} \left(x_i^2 + x_j^2 - 2 x_i x_j\right) \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(n-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \sum_{i<j} x_i x_j \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j$$

Prin urmare,

$$n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \text{ , deci}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{n-1}{2}$$

$\square$

6 C-B-S:

$$(xy+yz+yz)\cdot\left(\frac{x}{y^2+y}+\frac{y}{z^2+z}+\frac{z}{x^2+x}\right) \geq$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{x^2y}{y^2+y}}+\sqrt{\frac{y^2z}{z^2+z}}+\sqrt{\frac{z}{x^2+x}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{y+1}}+\frac{y}{\sqrt{z+1}}+\frac{z}{\sqrt{x+1}}\right)^2$$

Vom arăta:

$$\frac{x}{\sqrt{y+1}} + \frac{y}{\sqrt{z+1}} + \frac{z}{\sqrt{x+1}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aplic din nou C - B - C, ținând cont

că $x+y+z=1$

$$\left(x\sqrt{y+1} + y\sqrt{z+1} + z\sqrt{x+1}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{x}{\sqrt{y+1}} + \frac{y}{\sqrt{z+1}} + \frac{z}{\sqrt{x+1}}\right) \geq$$

$$\geq \left(x+y+z\right)^2 = 1$$

Deci $\frac{x}{\sqrt{y+1}} + \frac{y}{\sqrt{z+1}} + \frac{z}{\sqrt{x+1}} \geq$

$$\geq \frac{1}{x\sqrt{y+1} + y\sqrt{z+1} + z\sqrt{x+1}}$$

Vreau

$$x\sqrt{y+1} + y\sqrt{z+1} + z\sqrt{x+1} \le \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Din nou C-B-S:

$$\left(x\sqrt{y+1} + y\sqrt{z+1} + z\sqrt{x+1}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{xy+x} + \sqrt{y}\cdot\sqrt{yz+y} + \sqrt{z}\cdot\sqrt{xz+z}\right)^2 \le$$

$$\le (x+y+z)\cdot(xy+yz+xz+x+y+z) =$$

$$= xy+yz+xz+1$$

Vreau $xy+yz+xz+1 \le \frac{4}{3}$,

adică $xy+yz+xz \le \frac{1}{3}$

Într-adevăr,

$$3(xy+yz+xz) \leq$$

$$\leq x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz) =$$

$$=(x+y+z)^2 = 1 \qquad \square$$

⑦ $S_n = \cos \alpha + \cos(2\alpha) + \dots + \cos(n\alpha)$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos(i\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}+i\alpha\right) + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{\alpha}{2} - i\alpha\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\alpha\right) - \sin\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\alpha\right)\right)$$

Rezultă că

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot S_n =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + \right.$$

$$+ \sin\left(\frac{5}{2}\alpha\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right)$$

$$+ \quad \ldots \quad +$$

$$\left. + \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right) - \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\frac{\alpha}{2} \right)$$

Rezultă că

$$\left| \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot S_n \right| \leq \frac{1}{2} \left(\left| \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha \right| + \left| \sin\frac{\alpha}{2} \right| \right) \leq$$

$$\leq 1$$

Cum $\alpha \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

avem $|S_n| \leq \underbrace{\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}}_{\overset{not}{=} M > 0}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$

$$|S_n| \leq M, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

Fie intervalele

$I_1 = [-M, -M + r]$

$I_2 = [-M + r, -M + 2r]$

$I_3 = [-M + 2r, -M + 3r]$

$\vdots$

$I_l = [-M + (l-1) \cdot r, -M + l \cdot r]$,

unde $l = \left[\frac{2M}{r}\right] + 1$, adică $-M + l \cdot r > M$

$I_1, I_2, \dots I_l$ au fiecare lungimea r și acoperă intervalul $[-M, M]$, unde se află toți termenii șirului $(S_n)_n$

Într-unul din aceste intervale, vor exista o infinitate de termeni ai șirului.

(8)

$$\sqrt{7x+9} + 21x^2 - 16x = \sqrt{3x+1} + 7,$$

$$x \geq 0$$

$$f, g : \left[-\frac{1}{3}, \infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 21x^2 - 16x - 7$$

$$x_{\text{vârf}} = \frac{8}{21}$$

$f \searrow$ pe $\left[0, \frac{8}{21}\right]$

$f \nearrow$ pe $\left[\frac{8}{12}, \infty\right)$

$g(x) = \sqrt{7x+9} - \sqrt{3x+1}$

$g(y) - g(x) =$

$= \sqrt{7y+9} - \sqrt{7x+9} - \left(\sqrt{3y+1} - \sqrt{3x+1}\right)$

$= \dfrac{7(y-x)}{\sqrt{7y+9} + \sqrt{7x+9}} - \dfrac{3(y-x)}{\sqrt{3y+1} + \sqrt{3x+1}}$

$= (y-x) \dfrac{7\left(\sqrt{3y+1} + \sqrt{3x+1}\right) - 3\left(\sqrt{7y+9} + \sqrt{7x+9}\right)}{\left(\sqrt{7y-9} + \sqrt{7x+9}\right)\left(\sqrt{3y+1} + \sqrt{3x+1}\right)}$

$$7 \cdot \sqrt{3y+1} \geq 3 \cdot \sqrt{7y+9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49 \cdot 3y + 49 \geq 63y + 81 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 147y - 63y \geq 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 84y \geq 32 \Leftrightarrow 21y \geq 8$$

$$y \geq \frac{8}{21}$$

Pentru $x, y \in \left[\frac{8}{21}, \infty\right)$

$$7\left(\sqrt{3x+1} + \sqrt{3y+1}\right) \geq$$

$$\geq 3 \cdot \left(\sqrt{7x+9} + \sqrt{7y+9}\right),$$

Pentru $x, y \in \left[0, \frac{8}{21}\right]$, inegalitatea are sens contrar

Prin urmare, $g \nearrow$ pe $\left[\frac{8}{21}, \infty\right)$ și

$$g \searrow \text{ pe } \left[0, \frac{8}{21}\right]$$

Rezultă că

$$f+g \nearrow \text{ pe } \left[\frac{8}{21}, \infty\right) \text{ și}$$

$$f+g \searrow \text{ pe } \left(-\infty, \frac{8}{21}\right]$$

Ecuația $f+g=0$ are cel mult o soluție pe fiecare din cele două intervale.

Pe intervalul $\left[\frac{8}{21}, \infty\right)$ se observă soluția $x=1$.

$$f(0) + g(0) = 3 - 7 - 1 < 0,$$

deci pe intervalul $\left[0, \frac{8}{21}\right]$ funcția $f+g$ ia doar valori negative

Soluție unică: $x = \frac{8}{21}$

$\square$